Om Interpolation som Middel til at lette Beregningen af irrationale Tal.

Af

Professor **Ludv. Oppermann.**

Da Newton i sin *Methodus Differentialis* (ɔ: *Differensmethode*) fremstillede sin Interpolationstheori, hvis Hovedsætning allerede var meddelt i det berømte 5te Lemma i tredie Bog af *Principia*, viste han ogsaa, hvorledes man derved kunde løse andre Opgaver end egentlige Interpolationsopgaver; navnlig gav han Grundlaget for den af Cotes, Stirling og Gauss udviklede Qvadraturmethode. Der er imidlertid en anden, noget beslægtet Brug af hans Interpolationsmethode, der i Grunden ligger nærmere og som i mange Tilfælde kan spare en Del Regning. Denne Anvendelse er paa en Maade allerede gjort af Stirling, som i sin *Methodus Differentialis* (i *Propositio XXX*) løser følgende Opgave: *Invenire Asymptoton Hyperbolæ generis Logarithmici ex datis ejus Ordinatis aliqvot æqvidistantibus,* og derefter tilføier, at man i samme Øiemed ogsaa kan bruge *Parabolam Newtoni* (ɔ: Newtons Interpolationsmethode); men da Stirlings Sætning synes at være saa godt som ubekjendt, og da han tilmed ikke har givet den i dens simpleste og mest omfattende Form, hvilket kun er muligt ved at tage Newtons Interpolationsmethode til

Udgandspunkt, saa er det neppe overflødigt, i Korthed at fremsætte Methoden i hele dens Almindelighed.

Har man efter en bestemt Lov beregnet en Række Værdier, der (stadigt voxende eller aftagende) uendeligt nærme sig en søgt Værdi, kan man betragte disse Værdier som Functioner af deres Nummer i Rækken og saa af dem ved Interpolation finde en yderligere Tilnærmelse til den søgte Værdi. Dennes Argument (Nummer) er rigtignok uendelig stort, og med det kan man ikke regne; men denne Vanskelighed undgaaes let. Man har blot som Argument istedetfor hver Værdis Nummer at vælge en saadan passende Function af samme, som bliver 0, naar Nummeret bliver ∞; Valget af denne Function maa naturligvis rette sig efter det enkelte Tilfældes Beskaffenhed. Er Valget gjort, saa anvendes Interpolationen, idet man søger den Værdi, som hører til Argumentet 0 i den nye Række.

Til Exempel, særligt paa de Tilfælde, som falde ind under den af Stirling løste Opgave, kan tjene Beregningen af π ved Hjælp af de indskrevne regulære Mangekanter, som Archimedes brugte (med Tilføielse af Trekanten). I efterstaaende Tavle er i Pillen n angivet i Mangekantens Nummer i Rækken, under A dens halve Perimeter (naar Cirklens Radius er Længde-Enhed) med 20 Decimaler, under a det valgte Argument, og endelig under B de første Ciffre af den Tilnærmelse, som faaes ved at benytte Værdierne under A (til den i Linien staaende Værdi inclusive). Feilen i den sidste Værdi under B er omtrent 81.10^{-20}.

	n	A	a	B
Trekant	1	2·598 076 211 353 315 940 29	1	2·598 . . .
Sexkant	2	3·	$\frac{1}{4}$	3·133 97 . . .
Tolvkant	3	3·105 828 541 230 249 148 19	$\frac{1}{16}$	3·141 580 06 . . .
24kant	4	3·132 628 613 281 238 197 16	$\frac{1}{64}$	3·141 592 650 572 . . .
48kant	5	3·139 350 203 046 867 207 14	$\frac{1}{256}$	3·141 592 653 589 675 1 . . .
96kant	6	3·141 031 950 890 509 638 11	$\frac{1}{1024}$	3·141 592 653 589 793 237 65 . .

Til at vælge den under a opførte Argumentrække ledes man let ved at betragte Rækken af Differenserne mellem de paa hinanden følgende Værdier under A (eller ogsaa ved den Maade, hvorpaa man af hver Værdi under A kan beregne den næste); man har naturligvis Lov til at multiplicere disse Argumenter med en constant Factor, og kan saaledes, om man vil, undgaa Brugen af brudne Argumenter.

Har man nu af den oprindelige Række tilnærmede Værdier (som den under A) ved Interpolation udledt en Række mere tilnærmede Værdier (som den under B), saa kan Methoden naturligvis ogsaa anvendes paa denne sidste, saafremt man kan finde en passende Argumentrække; men dette er i mange Tilfælde (maaskee i de fleste) ikke let, og det er neppe muligt i alle Tilfælde.

Et andet Exempel, som henhører til de af Stirling blot omtalte Tilfælde, faaes ved at tage Cirklens Diameter og de halve Perimetre af den indskrevne Firkant, Sex-, Otte-, Ti- og Tolvkant som Tilnærmelser til π. Resultatet er fremstillet i efterstaaende Tavle, der er indrettet som den foregaaende:

n	A	a	B
1	2·	1	2·
2	2·828 427 124 746 190	$\frac{1}{4}$	3·104 569 . . .
3	3·	$\frac{1}{9}$	3·141 344 4 . . .
4	3·061 467 458 920 718	$\frac{1}{16}$	3·141 592 114 . . .
5	3·090 169 943 749 474	$\frac{1}{25}$	3·141 592 653 101 . . .
6	3·105 828 541 230 249	$\frac{1}{36}$	3·141 592 653 589 579 . . .

Feilen i den sidste Værdi under B er omtrent 21.10^{-14}.

Som sidste Exempel vil jeg tage den bekjendte Række for π:

$$\pi = \frac{8}{1.3} + \frac{8}{5.7} + \frac{8}{9.11} + \ldots ;$$

betegner A_n den Tilnærmelsesværdi, som faas ved at summere de første n Led af Rækken, saa maa man tage $\frac{1}{n}$ til Argument for A_n; af de fem Værdier $A_1 \ldots A_5$ findes ved Interpolation $A_0 = 3{\cdot}1415871$, med en Feil af omtrent 55.10^{-7}, det vil sige, med større Nøiagtighed, end om man havde adderet 90000 Led af Rækken. Og dog er dette Resultat ikke saa godt som det kan faaes ved Interpolation af de samme Led; thi Differensen $A_0 - A_n$ har Formen $\varkappa n^{-1} + \lambda n^{-3} + \mu n^{-5} \ldots$, og man vinder virkelig noget, naar man ved Interpolationen tager Hensyn hertil. Endnu kan ved dette Exempel bemærkes, at den oprindelige Række $\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} \ldots$ ogsaa kunde have været brugt; thi den fører til et af de Tilfælde, hvori Tilnærmelsesmethoden kan bruges, uagtet de successive Værdier skiftevis ere for store og for smaa.

Det Foregaaende er vist nok til at henlede Opmærksomheden paa Methoden; en nøiere Udvikling af, i hvilke Tilfælde den med Fordel kan bruges, og af de særegne Forhold, der kunne vise sig ved dens Anvendelse, kan ikke vel gives uden i Forbindelse med en udtømmende Fremstilling af Theorien for Interpolation.

Det kan maaske tilstedes, her at tilføie en Bemærkning om, hvorledes Archimedes formodentlig har baaret sig ad med de Uddragninger af Qvadratrod, som hans Beregning af π krævede.

Ere a og b to givne Størrelser, $a > b$, og er α deres arithmetiske, β deres harmoniske Mellemproportional, saa er $\sqrt{ab} = \sqrt{\alpha\beta}$, og man nærmer sig meget hurtigt til $\sqrt{ab}$ ved mellem a og b at indskyde den arithmetiske og den harmoniske Mellemproportional α og β, mellem disse igjen den arithmetiske og den harmoniske Mellemproportional, o. s. fr. Søges $\sqrt{3}$, og tages $a = 3$, $b = 1$, hvilket er et meget ugunstigt Tilfælde, saa faar man følgende sammenhørende Grændseværdier for $\sqrt{3}$:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}; \quad \frac{7}{4}, \frac{12}{7}; \quad \frac{97}{56}, \frac{168}{97}; \quad \frac{19817}{10864}, \frac{32592}{19817}; \text{ o. s. v.}$$

Differensen mellem de to sidste Brøker er $< \frac{1}{2}.10^{-8}$. At Archimedes kan have brugt denne Fremgangsmaade, lader sig ikke negte; at han virkelig har brugt den, bliver meget rimeligt, naar betænkes, at det er den allernemmeste, som kan haves, naar man skal have Grændseværdier og disse skulle udtrykkes ved sædvanlige Brøker, hvilket Archimedes var nødt til.